

减振与降噪

橡胶扭振减振器刚度模型研究

田中旭¹, 祁平², 邓康耀¹, 崔毅¹(1. 上海交通大学 动力机械及工程教育部重点实验室, 上海 200240;
2. 中国北方发动机研究所, 山西 大同 037036)

摘要: 基于极坐标形式的弹性力学基本方程, 推导了橡胶扭振减振器的扭转刚度计算公式, 可方便地应用于减振器设计和试验的验证。同时给出了扭转刚度的有限元分析方案和步骤, 并通过有限元分析对计算公式进行了验证, 分析结果证明了所推导的刚度计算公式的精确性。

关键词: 橡胶扭振减振器; 扭转刚度; 弹性力学; 有限元分析

中图分类号: TH703.63 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4357(2014)02-0044-04

Modeling for Torsional Stiffness of Rubber Dampers

Tian Zhongxu¹, Qi Ping², Deng Kangyao¹, Cui Yi¹(1. Key Laboratory for Power Machinery and Engineering of Ministry of Education,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240;
2. China North Engine Research Institute, Shanxi Datong 037036)

Abstract: Based on the basic equation of elastic mechanics under polar coordinate system, formulas of torsional stiffness for rubber dampers are derived, which would be beneficial to the design of rubber dampers and test verification. The FEA scheme of torsional stiffness, as well as the procedures are put forward, and the formulas are verified through FEA to be accurate.

Keywords: rubber damper for torsional vibration; torsional stiffness; elastic mechanics; FEA

0 引言

扭振减振器具有降低发动机扭矩峰值, 减轻扭转振动的作用^[1,2]。在振动控制中, 需要依据振动控制的目标, 选择定调比, 确定减振器的自然频率, 而决定减振器自然频率的最重要参数就是刚度参数。橡胶扭振减振器因其造价低, 工作可靠, 仍然在众多中小功率发动机轴系的减振降噪中得到广泛应用。橡胶扭振减振器(图 1)主要由外圈的惯性块、内圈以及它们之间的橡胶层组成。减振器的刚度是由橡胶层位置、厚度、形状等因素所决定的, 当橡胶层结构不够规则时, 则给刚度计算带来困难。目前多数减振器厂家都以以往减振器参数作为参考, 做适当修改, 然后再通过试验测量确认其刚度参数^[3-5]。在测量中, 受到测量设备、阻尼参数

等影响, 常常具有较大的误差。如能有精度高的计算方法, 能够在设计前对减振器刚度进行准确的计算, 或根据需要直接确定出橡胶层的结构参数, 对于减振器的设计效率会有较大的提高。此外, 准确的减振器刚度计算, 也是改进试验和制定试验方案的重要参考。

减振器参数的计算, 总体可以分为两个方向: 由理论推导或经验统计得出的解析公式计算方法和有限元法。其中, 解析公式得出困难, 目前还没有一个准确和适应性强的解析模型。但解析模型实际使用非常方便, 也有利于研究各个设计参数对减振器性能的影响规律, 十分适合于减振器设计使用。有限元分析的方法可以计算出比较准确的刚度参数, 但分析结果易受网格数量和质量、边界条件的影响; 而且有限元分析过程以及后期的减振器刚度计算过

收稿日期: 2013-08-01

作者简介: 田中旭(1971-), 男, 副研究员, 主要研究方向为发动机动力学与强度分析, E-mail: zxtian@sjtu.edu.cn。

程比较烦琐,对有限元分析方案的制定要求较高。此外,有限元法计算对各个设计参数反应不够明确,不利于分析各个设计参数对扭转刚度的影响规律。因此,一个准确的数学模型,对于减振器设计和应用具有重要意义。本文基于极坐标形式的弹性力学基本方程,推导了橡胶扭振减振器的扭转刚度计算公式,并给出了扭转刚度的有限元分析方案和步骤,并通过有限元分析对计算公式进行了验证。

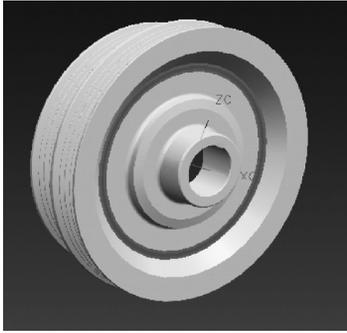


图1 橡胶扭振减振器(深色部分为橡胶层)

1 减振器刚度计算公式

如图2为一柱坐标系下描述的减振器橡胶圈,设减振器橡胶层内边界半径为 $r_1(z)$,外边界半径为 $r_2(z)$,其中 $z \in [0, L]$, L 为橡胶层的轴向宽度。

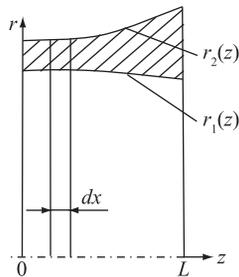


图2 扭振减振器的橡胶层

根据扭转刚度物理概念,这里扭转刚度 k 可描述为:当 $r_1(z)$ 固定不动时, $r_2(z)$ 绕 z 轴转动 1rad 时所需要的扭矩,即为扭转刚度。对于轴向任意微小区域 dz ,设扭转刚度为 dk ,根据扭转刚度定义,刚度 k 可用如下公式计算:

$$k = \int_{z=0}^L dk \quad (1)$$

首先须要计算微小区域 dz 的扭转刚度 dk ,其计算过程如下。

在 z 处的某微小宽度 dz 的橡胶层,当传递单位扭矩时,径向坐标为 r ($r \in [r_1(z), r_2(z)]$)处的橡胶层受的总剪力为:

$$T = \frac{1}{r} \quad (2)$$

在微小区域 dz 中,可认为剪应力不变化,即略掉了高阶微量。此时,剪应力为

$$\tau = \frac{1}{2\pi r^2 dz} \quad (3)$$

依据橡胶材料的本构关系,剪应变为

$$\gamma_r = \frac{1}{2\pi G r^2 dz} \quad (4)$$

其中, G 为橡胶材料的剪切弹性模量。

以下须要求出橡胶层的内侧相对于外侧的扭转角度,这就须要先求出外边缘相对内边缘的切向位移,即在假设橡胶层内边缘位移为0时,求出外边缘的切向位移 t 。

依据极坐标下的弹性力学几何方程,得到剪应变与位移的关系为

$$\gamma_r = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \quad (5)$$

其中, v_θ 为切向位移, u_r 是径向位移, θ 是极坐标系下的转角坐标。

因各个橡胶层只有切向位移 v_θ ,即 u_r 为0,所以式(5)变为

$$\gamma_r = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \quad (6)$$

由式(4)和(6)得

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{2\pi G r^2 dz} \quad (7)$$

式(7)为一阶线性非齐次方程,其解为如下形式:

$$v_\theta = \left(\int \frac{1}{2\pi G r^2 dz} e^{-\int \frac{1}{r} dr} dr + C \right) e^{\int \frac{1}{r} dr} \quad (8)$$

化简后得出

$$v_\theta = -\frac{1}{4\pi G r dz} + Cr \quad (9)$$

依据边界条件

$$v_\theta |_{r=r_1(z)} = 0 \quad (10)$$

得出

$$C = \frac{1}{4\pi G r_1^2(z) dz} \quad (11)$$

根据式(9)和(11)得出最终的橡胶层切向位移为

$$v_\theta = \frac{1}{4\pi G dz} \left(\frac{r}{r_1^2(z)} - \frac{1}{r} \right) \quad (12)$$

从而可以得出橡胶层外边缘,即 $r=r_2(z)$ 时的切向位移为

$$t = v_\theta |_{r=r_2(z)} = \frac{1}{4\pi G dz} \left(\frac{r_2(z)}{r_1^2(z)} - \frac{1}{r_2(z)} \right) \quad (13)$$

则橡胶层的外边缘相对与内边缘的转角 α 为:

$$\alpha = \frac{t}{r_2(z)} = \frac{1}{4\pi G dz} \left(\frac{1}{r_1^2(z)} - \frac{1}{r_2^2(z)} \right) \quad (14)$$

α 即为 z 处的 dz 宽度橡胶的扭转柔度, 则其扭转刚度 dk 为

$$dk = \frac{1}{\alpha} = 4\pi G \frac{r_1^2(z)r_2^2(z)}{r_2^2(z) - r_1^2(z)} dz \quad (15)$$

最后橡胶层的总扭转刚度可表达为:

$$k = \int_{z=0-L} dz = 4\pi G \int_0^L \frac{r_1^2(z)r_2^2(z)}{r_2^2(z) - r_1^2(z)} dz \quad (16)$$

如果 $r_1(z)$ 和 $r_2(z)$ 形式复杂, 可采用如下数值积分的方法对式(16)进行积分计算, 可采用梯形积分公式得到如下形式:

$$k = 2\pi G \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\left(\frac{r_1^2(z_i)r_2^2(z_i)}{r_2^2(z_i) - r_1^2(z_i)} + \frac{r_1^2(z_{i+1})r_2^2(z_{i+1})}{r_2^2(z_{i+1}) - r_1^2(z_{i+1})} \right) (z_{i+1} - z_i)}{2} \right) \right] \quad (17)$$

其中, 设 z_0, z_1, \dots, z_n 为轴向 n 个坐标。

如果橡胶层是标准的柱状, 即内外边缘都是标准圆柱面, 即 $r_1(z)$ 和 $r_2(z)$ 为常数 R_1 和 R_2 , 则由式(16)可直接得出此情况下的扭转刚度计算公式为:

$$k = 4\pi GL \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \quad (18)$$

值得注意的是, 如果式(5)采用笛卡尔坐标系下的几何方程, 则丢掉了方程中的 $-v_\theta/r$ 一项, 可得出另一种形式的刚度计算公式, 但会带来明显的计算误差。

2 简化计算模型和参数性质讨论

式(16)稍显复杂, 给计算和减振器参数的性质分析带来不便, 这里讨论简化的计算模型。

设 x 处的橡胶层厚度为 $h(x)$, 它与内外半径有如下关系:

$$r_1(z) = r_2(z) - h(z) \quad (19)$$

式(16)可变为如下形式:

$$k = 4\pi G \int_0^L \frac{r_1^4(z) + 2r_1^3(z)h(z) + r_1^2(z)h^2(z)}{h(z)(2r_1(z) + h(z))} dz \quad (20)$$

考虑到 $r_1(z)$ 远大于 $h(z)$ (一般要相差一到两个量级), 所以式(20)中的三项依次减小约一个量级。根据简化程度, 则可得到如下简化的刚度计算公式:

$$k_1 = 4\pi G \int_0^L \left(\frac{r_1^3(z)}{2h(z)} + r_1^2(z) + \frac{1}{2}r_1(z)h(z) \right) dz \quad (21)$$

$$k_2 = 4\pi G \int_0^L \left(\frac{r_1^3(z)}{2h(z)} + r_1^2(z) \right) dz \quad (22)$$

$$k_3 = 2\pi G \int_0^L \frac{r_1^3(z)}{h(z)} dz \quad (23)$$

为了研究各个简化公式的计算精度, 依据积分中值定律, 存在 $\xi \in [0, L]$, 使得式(20)计算结果为

$$k = 4\pi GL \frac{r_1^4(\xi) + 2r_1^3(\xi)h(\xi) + r_1^2(\xi)h^2(\xi)}{h(\xi)(2r_1(\xi) + h(\xi))} \quad (24)$$

$$\text{设 } h(\xi) = \varepsilon r_1(\xi) \quad (25)$$

因一般橡胶层厚度远小于橡胶层内边缘半径, 所以 ε 一般远小于 1。最后, 式(24)可变为

$$k = 4\pi GL r_1^2(\xi) \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon(2 + \varepsilon)} \quad (26)$$

类似地, 可给出上述各个简化公式的新形式:

$$k_1 = 4\pi GL r_1^2(\xi) \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \quad (27)$$

$$k_2 = 4\pi GL r_1^2(\xi) \frac{1 + 2\varepsilon}{2\varepsilon} \quad (28)$$

$$k_3 = 4\pi GL r_1^2(\xi) \frac{1}{2\varepsilon} \quad (29)$$

当橡胶层厚度 $h(x)$ 为橡胶层内边缘圆周半径 $r_1(z)$ 的十分之一左右时, 即 $\varepsilon \approx 0.1$, 将式(27)、(28)、(29)与式(26)相比较, 可大致估算出简化计算公式得出的刚度 k_1 、 k_2 、 k_3 的误差分别约为 5.0%、4.1%、13%。当橡胶层厚度 $h(x)$ 为橡胶层内边缘圆周半径 $r_1(z)$ 的二十分之一左右时, k_1 、 k_2 、 k_3 的误差分别约为 2.5%、2.3%、7.0%。

由简化公式(21)~(23)可以比较方便地分析出各个设计参数对减振器扭转刚度的影响规律, 具体如下:

(1) 随着橡胶层厚度的增加, 减振器的扭转刚度减小, 减振器的柔度随着橡胶层的厚度变化, 大致呈线性变化规律;

(2) 当橡胶层所在圆周半径增加时, 扭转刚度也相应增加, 其变化规律与半径的三次方大致呈线性关系;

(3) 扭转刚度随着橡胶层的轴向宽度的增加而增加, 并随轴向宽度大致呈线性变化规律。

3 刚度的有限元分析

为了验证推导出的刚度计算模型, 这里采用有限元法计算橡胶层的扭转刚度, 其计算步骤和要点如下:

(1) 选择 8 节点六面体单元或 10 节点四面体单元, 设置准确的材料弹性模量和泊松比;

(2) 采用足够的网格密度, 对几何体划分网格, 其中保证厚度方向有足够的网格密度;

(3) 橡胶层内圈所有节点固定;

(4) 如减振器回转中心为 z 轴(图 2), 并设橡胶层外表面所有 m 个节点的坐标为 (x_i, y_i, z_i) (其中 $i=1, 2, \dots, m$)。为这些节点设置位移约束: 沿外表面切线方向位移为 $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ (其中 $i=1,$

2, ..., m), 即相当转动角度为 1rad, 这一过程可在柱坐标系下通过定义函数来实现;

(5) 进行有限元计算后, 获得外表面各个节点切向反力为 F_i (其中 $i=1, 2, \dots, m$);

(6) 减振器扭转刚度计算公式为:

$$k = \sum_{i=1}^m F_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (30)$$

当减振器的橡胶层是标准柱状时, 即橡胶层内外边缘半径分别为常数 R_1 和 R_2 , 有限元计算过程可以做如下简化处理:

(1) 在上述第(4)步中, 切向位移均为常数 R_2 ;

(2) 减振器刚度计算公式(30)可简化为:

$$k = R_2 \sum_{i=1}^n F_i \quad (31)$$

(3) 这种情况下, 也可采用平面应变问题有限元法进行计算, 可大大减少计算量。

4 算例

图3和图4是扭振减振器A和B橡胶层计算的有限元模型, 其中减振器A的橡胶层是标准柱状, 减振器B的橡胶层内外圈表面则是较复杂的曲面。采用本文公式、简化公式和有限元分析得出的两个减振器扭转刚度计算结果见表1, 其中误差计算是参照有限元法的计算结果。

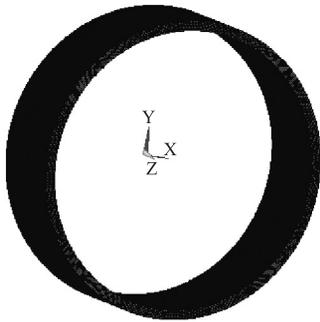


图3 减振器A橡胶层有限元模型

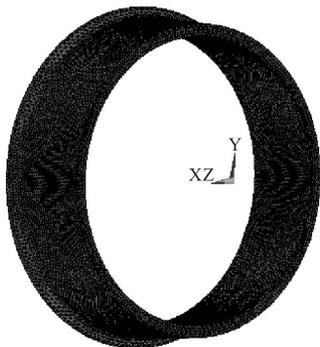


图4 减振器B橡胶层有限元模型

表1 扭转刚度计算结果

单位: ((N·m)·rad⁻¹)

计算方法	减振器 A		减振器 B	
	刚度	误差	刚度	误差
精确公式(16)或(20)	16 489	0.0%	7 664.4	0.1%
简化公式(22)	17 049	3.4%	7 977.7	4.0%
简化公式(23)	16 980	3.0%	7 931.9	3.4%
简化公式(24)	14 951	9.3%	6 817.9	11.1%
有限元法	16 489	/	7 672.2	/

从计算结果可以看出, 由本文得出的计算公式和有限元分析得到的结果非常接近, 说明了计算模型和有限元分析都是比较精确的。本文给出的简化公式, 也可应用于对计算精度要求不高的场合。

计算结果中, 减振器B的计算误差稍大, 误差主要来源于曲面的数据处理。

5 小结

本文推导了橡胶扭振减振器的扭转刚度计算公式, 可方便地用于扭振减振器的设计。本文还给出了扭振减振器的扭转刚度的有限元分析方案, 可用于进行减振器扭转刚度计算, 并验证了本文得出的扭转刚度计算模型的精确性。

计算中, 橡胶材料的力学参数对计算结果具有很大的影响, 需要谨慎确定。

参考文献

- [1] Fredrik stman, Hannu T. Toivonen. Active torsional vibration control of reciprocating engines[J]. Original Research Article. Control Engineering Practice, 2008, 6(1): 78-88.
- [2] 张俊红, 倪广健, 郑勇, 等. 基于BP神经网络的柴油机轴系扭振减振器优化设计[J]. 内燃机学报, 2008, 26(1): 83-86.
- [3] Christof Sihler. A novel torsional exciter for modal vibration testing of large rotating machinery[J]. Original Research Article. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(7): 1725-1740.
- [4] 刘兴华, 仇滔, 刘福水, 等. 内燃机橡胶扭振减振器特性参数检测系统[J]. 兵工学报, 2004, 25(4): 491-493.
- [5] 柳志远, 刘鹏郎, 易理, 等. 橡胶式扭振减振器固有频率与阻尼比的测试方法比较[J]. 北京农业工程大学学报, 1995, 15(4): 13-17.